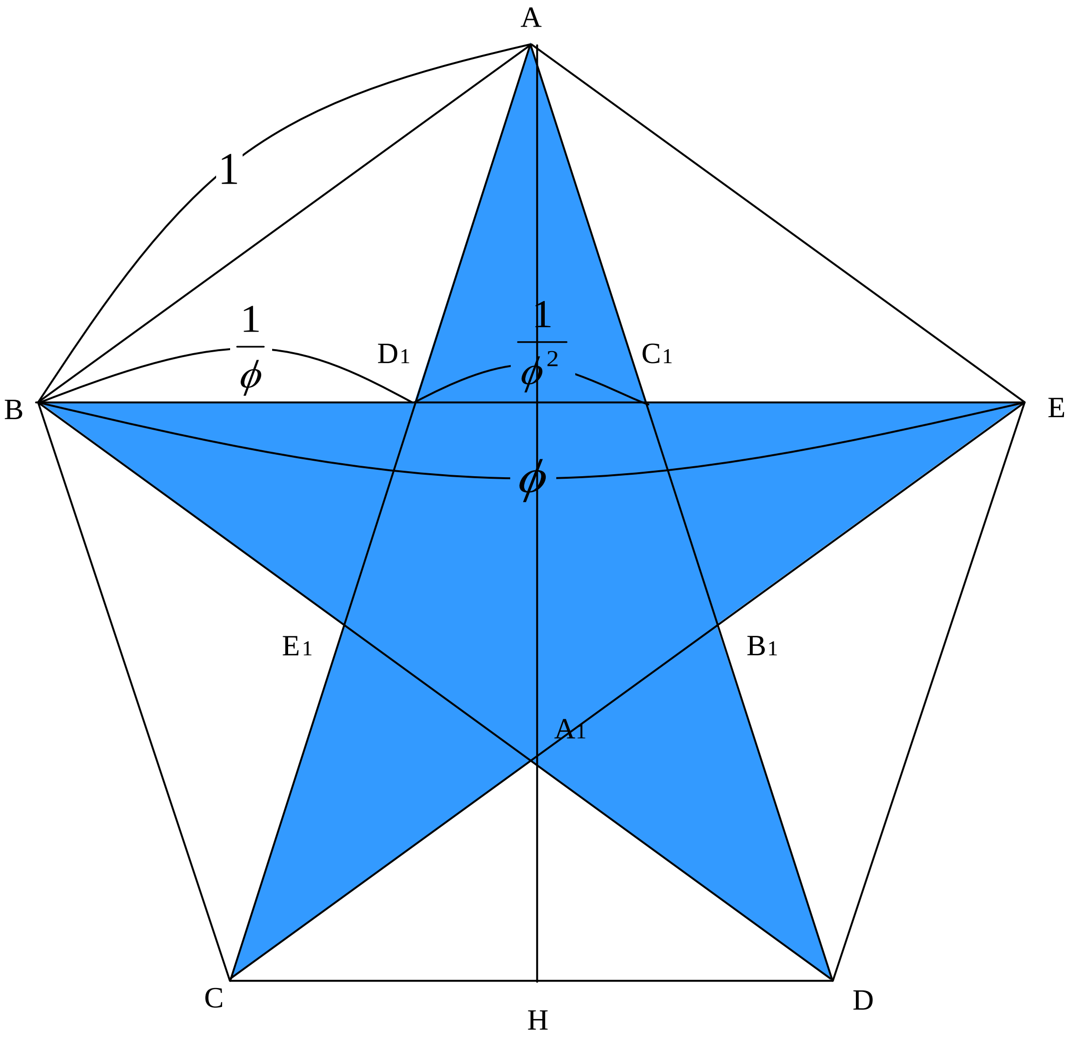
この問題を解くにあたって、$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$ とおくことにし、$\phi+1=\phi^2$ と、$\phi-1=\frac{1}{\phi}$ から導かれる、

$$\frac{1}{\phi^2}=1-\frac{1}{\phi}=1-(\phi-1)=-\phi+2$$

を利用する。

【問題1】



正五角形の対角線の長さは一辺の長さの $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$ 倍であることから、BE＝ϕ とおけ、AE＝ED$_1$から、BD$_1$＝$\phi-1=\frac{1}{\phi}$ である。また、AB＝BC$_1$から、C$_1$D$_1$＝$1-(\phi-1)=-\phi+2=\frac{1}{\phi^2}$ となる。

ここで、A_1から CD に垂線 A_1H を下ろし、四角形 ABCH の面積を考える。
四角形 ABCH は△A_1CH と△ACA_1と△ABC に分けられて、△A_1CH と△ACA_1の面積比は DB_1：AB_1、△ACA_1と△ABC の面積比は A_1E_1：BE_1なので、△A_1CH の面積だけ求めれば良い。
A_1C＝BD_1から、△A_1CH において三平方の定理より、

$$
\begin{aligned}
A_1H^2 &= A_1C^2 - CH^2 \\
&= \left(\frac{1}{\phi}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\phi^2} - \frac{1}{4} \\
&= -\phi + 2 - \frac{1}{4} \\
&= -\phi + \frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

よって、$A_1H = \sqrt{-\phi + \frac{7}{4}}$ なので、△A_1CH＝$\frac{1}{4}\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}}$ となる。

また、DB_1：AB_1＝$\frac{1}{\phi}$：1＝1：φから、△ACA_1＝$\frac{1}{4}\phi\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}}$ となり、

A_1E_1：BE_1＝$\frac{1}{\phi^2}$：$\frac{1}{\phi}$＝1：φから、△ABC＝$\frac{1}{4}\phi^2\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}}$ となる。

したがって、四角形 ABCH＝$\frac{1}{4}\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}} + \frac{1}{4}\phi\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}} + \frac{1}{4}\phi^2\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}}$

＝$\frac{1}{4}\left(\phi^2 + \phi + 1\right)\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}}$

ここで、$\phi + 1 = \phi^2$ から、四角形 ABCH＝$\frac{\phi^2}{2}\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}}$ となる。

したがって、正五角形 ABCDE＝2×四角形 ABCH＝$\phi^2\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}}$ となる。

また、△A_1CD＝2×△A_1CH＝$\frac{1}{2}\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}}$ であり、
s_1＝正五角形 ABCDE－5×△A_1CD より、

$s_1 = \phi^2\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}} - \frac{5}{2}\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}} = \left(\phi + 1 - \frac{5}{2}\right)\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}} = \left(\phi - \frac{3}{2}\right)\sqrt{-\phi + \frac{7}{4}}$ となる。

ここで、$\left(\phi-\frac{3}{2}\right)\sqrt{-\phi+\frac{7}{4}}=\sqrt{\left(\phi-\frac{3}{2}\right)^2}\times\sqrt{-\phi+\frac{7}{4}}$

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{\left(\phi^2-3\phi+\frac{9}{4}\right)\left(-\phi+\frac{7}{4}\right)}\\
&=\sqrt{\left(-2\phi+\frac{13}{4}\right)\left(-\phi+\frac{7}{4}\right)}\\
&=\sqrt{2\phi^2-\frac{7}{2}\phi-\frac{13}{4}\phi+\frac{91}{16}}\\
&=\sqrt{2(\phi+1)-\frac{27}{4}\phi+\frac{91}{16}}\\
&=\sqrt{\frac{1}{4}\left(-19\phi+\frac{123}{4}\right)}
\end{aligned}
$$

これに $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を代入して、$\sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{85-38\sqrt{5}}{4}}=\frac{\sqrt{85-38\sqrt{5}}}{4}$

$\therefore \underline{s_1=\frac{\sqrt{85-38\sqrt{5}}}{4}}$