

どの2点間の距離も等しい格子点

次の条件を満たす自然数 n の集合 S を考える .

$n - 1$ 次元 Euclid 空間内の n 個の格子点で , どの2点間の距離も等しいものが存在する .

以下 , E_n は n 次単位行列 , U_n はすべての成分が1である n 次正方行列 , u_n はすべての成分が1である n 次列ベクトルを表すとする .

定理 1. $n \in S$ となるのは , ある正の整数 s に対して次の同値な条件が成り立つときかつそのときに限る .

(1) ある $X \in M_{n-1,n}(\mathbb{Z})$ が存在して

$${}^tXX = s(nE_n - U_n). \quad (1)$$

(2) ある $Y \in M_{n-1}(\mathbb{Z})$ が存在して

$${}^tYY = s(nE_{n-1} - U_{n-1}). \quad (2)$$

証明. $n \in S$ とする . $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^{n-1}$ を異なる2点間の距離 $d = |x_i - x_j|$ が一定である格子点とし , $x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ をそれらの重心とする . 必要ならば x_i の代わりに $x'_i = n(x_i - x_0) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ を考えることにより , $x_0 = 0$ として一般性を失わない . このとき各点と重心の間の距離の平方 $a = |x_i|^2 \in \mathbb{Z}$ は一定であり , また任意の $i \neq j$ に対して

$$d^2 = |x_i - x_j|^2 = |x_i|^2 + |x_j|^2 - 2(x_i, x_j) = 2[a - (x_i, x_j)]$$

であるから , 異なる2点が定める内積 $b = (x_i, x_j) \in \mathbb{Z}$ も一定である . したがって $X = (x_1, \dots, x_n) \in M_{n-1,n}(\mathbb{Z})$ とおくと ,

$${}^tXX = (a - b)E_n + bU_n. \quad (3)$$

一方 $Y = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in M_{n-1}(\mathbb{Z})$, $u = u_{n-1}$ とおくと , $Yu + x_n = nx_0 = 0$ より , $X = (Y, x_n) = (Y, -Yu)$ であるから ,

$${}^tXX = \begin{pmatrix} {}^tYY & -{}^tYYu \\ -{}^t u {}^tYY & {}^t u {}^tYYu \end{pmatrix}. \quad (4)$$

(3) と (4) を比較すると ,

$${}^tYY = (a - b)E_{n-1} + bU_{n-1}, \quad (5)$$

$$-{}^tYYu = bu, \quad (6)$$

$${}^t u {}^tYYu = a. \quad (7)$$

(6),(7) より $a = -b{}^t u u = -(n-1)b$ であるから , $s = -b \in \mathbb{Z}$ とおけば , (3),(5) からそれぞれ (1),(2) が従う . このとき $d^2 = 2(a - b) = 2ns$ であるから , $s > 0$. また , 条件 1 および 2 が同値であることは容易に確かめられ , 逆にこれらが成り立つならば , X の列ベクトルが定める n 個の格子点は与えられた条件を満たすことが分かる . \square

命題 2. $n \in S$ とし, s を定理 1 におけるものとする. このとき, n が奇数ならば n は平方数であり, n が偶数ならば s は平方数である.

証明. 等式 (2) の両辺の行列式を取ると,

$$(\det Y)^2 = s^{n-1}n^{n-2}.$$

これから主張が従う. □

命題 3. n が平方数ならば, ある平方数 s に対して定理 1 の条件が成り立つ. 特に, $n \in S$.

証明. $n = m^2$ とする. $Y = m(m-1)E_{n-1} - U_{n-1}$ とおくと, ${}^tY = Y$ より,

$$\begin{aligned} {}^tYY &= Y^2 = [m(m-1)E_{n-1} - U_{n-1}]^2 \\ &= m^2(m-1)^2E_{n-1} - 2m(m-1)U_{n-1} + U_{n-1}^2 \\ &= (m-1)^2(nE_{n-1} - U_{n-1}). \end{aligned}$$

□

系 1. n が奇数ならば, $n \in S$ となるのは n が平方数のときかつそのときに限る.

系 2. $n \in S$ ならば, 定理 1 における s として平方数を取ることができる.

定理 4. $n \in S$ となるのは, 次の条件を満たす $r \in \mathbb{Z}$ および $Z \in M_n(\mathbb{Z})$ が存在するときかつそのときに限る: Z の第 n 行の成分はすべて r であり,

$${}^tZZ = r^2nE_n.$$

証明. $n \in S$ とする. 定理 1 の条件を満たす平方数 s および $X \in M_{n-1,n}(\mathbb{Z})$ を取り, $s = r^2$ とし,

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ r^t u_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Z})$$

とおけば, 与えられた条件が成り立つ. 逆は明らかである. □

以下, 加群の同形

$$\begin{aligned} M_{m,p}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M_{n,q}(\mathbb{Z}) &\simeq M_{mn,pq}(\mathbb{Z}) \\ E_{i,k} \otimes E_{j,l} &\mapsto E_{(i-1)n+j, (k-1)q+l} \end{aligned}$$

($E_{i,j}$ は行列単位) により両者を同一視する. このとき, 上の対応は行列の積および転置を取る操作と可換であることに注意する. 特に $m = p, n = q$ のとき, 上の対応は環の同形となる.

命題 5. S は積閉集合である.

証明. $m, n \in S$ とする. 定理 4 の条件を満たす $r_m, r_n \in \mathbb{Z}$ および $Z_m \in M_m(\mathbb{Z}), Z_n \in M_n(\mathbb{Z})$ を取り,

$$Z = Z_m \otimes Z_n \in M_{mn}(\mathbb{Z})$$

とおくと, Z の第 mn 行の成分はすべて $r_m r_n$ であり,

$${}^tZZ = {}^tZ_m Z_m \otimes {}^tZ_n Z_n = r_m^2 m E_m \otimes r_n^2 n E_n = (r_m r_n)^2 mn E_{mn}.$$

したがって, $mn \in S$. □

ここで

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

とおき, 環の単射準同形

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[i] &\hookrightarrow M_2(\mathbb{Z}) \\ x + yi &\mapsto xE_2 + yI_2 \end{aligned}$$

により Gauss の整数環 $\mathbb{Z}[i]$ を $M_2(\mathbb{Z})$ の部分環とみなす. このとき, 後者における転置は前者における共役に対応していることに注意する.

命題 6. n が無平方部分に素因数 $p \equiv -1 \pmod{4}$ を持たない偶数ならば, $n \in S$.

証明. $r = (n - 2)/2$ とする. また $\alpha = 1 + i \in \mathbb{Z}[i]$ とし, $N(\beta) = \beta\bar{\beta} = n$ となる $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ を取る. このとき

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha \otimes U_r + \beta \otimes (rE_r - U_r) & -r\alpha \otimes u_r \\ r\alpha \otimes {}^t u_r & r\alpha \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Z})$$

は定理 4 の条件を満たすことが確かめられる. □

同様に

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

とし,

$$I_4 = E_2 \otimes I_2, \quad J_4 = I_2 \otimes J_2, \quad K_4 = I_4 J_4 = I_2 \otimes I_2 J_2 \in M_4(\mathbb{Z})$$

とおき, 環の単射準同形

$$\begin{aligned} Q &\hookrightarrow M_4(\mathbb{Z}) \\ x + yi + zj + wk &\mapsto xE_4 + yI_4 + zJ_4 + wK_4 \end{aligned}$$

により \mathbb{Z} 上の四元数環 Q を $M_4(\mathbb{Z})$ の部分環とみなす. このとき, 後者における転置は前者における共役に対応していることに注意する.

命題 7. n が 4 の倍数ならば, $n \in S$.

証明. $r = (n - 4)/4$ とする. また $\alpha = 1 + i + j + k \in Q$ とし, $N(\beta) = \beta\bar{\beta} = n$ となる $\beta \in Q$ を取る. このとき

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha \otimes U_r + \beta \otimes (rE_r - U_r) & -r\alpha \otimes u_r \\ r\alpha \otimes {}^t u_r & r\alpha \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Z})$$

は定理 4 の条件を満たすことが確かめられる. □